

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A IX A

1. Se consideră funcțiile $f, g : R \rightarrow R$, $f(x) = a \cdot x + b$, $g(x) = m \cdot x + n$
 - a) Dacă $a, b, m, n \in Q$ iar $f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2})$, atunci $f(x) = g(x)$ pentru orice x -număr real.
 - b) Dacă $a, b, m, n \in R$, $a \neq m$ și $b \neq n$ iar $f(2000) + f(2024) = g(2000) + g(2024)$, rezolvați ecuația $f(x) = g(x)$, în mulțimea numerelor reale.
2. Se consideră paralelogramul ABCD iar M este un punct astfel încât $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MA}$. Demonstrați că $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM}$
3. Numim operație împărțirea unui pătrat în patru părți egale prin drepte paralele cu ambele perechi de laturi opuse și hașurarea uneia dintre părțile rezultate. Unui pătrat de latura 1 îi aplicăm în primul pas această operație. În pasul doi fiecărui pătrat rămas nehașurat din pasul anterior îi aplicăm din nou câte o operație. În continuare, la fiecare pas, se aplică câte o operație fiecărui pătrat rămas nehașurat în pasul anterior.
 - a) Asupra câtor pătrate se aplică câte o operație la pasul 5 ?
 - b) Ce parte din pătratul inițial a rămas nehașurată în urma aplicării operațiilor în 2012 pași succesivi?
4. Un automobil are consum diferențiat la 100 km după cum se deplasează pe drum drept, la coborâre sau la urcare astfel : pe drum drept consumul este de 7 l la 100 km, la urcare consumul este de 9 l la 100 km, iar la coborâre consumul este de 5 l la 100 km. Știind că pentru a ajunge din localitatea A în localitatea B o mașină parcurge cele trei tipuri de drum cu un consum total de 39 litri de benzina, iar pentru a ajunge din B în A mașina consumă 45 litri de benzina se cere să se determine ce distanță este între localitățile A și B.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A X A

1. Se consideră numărul real $x = \frac{a+2}{2a+1}$, unde $a = \log_3 2$. Demonstrați că $a \in (0,1)$ și $x \in (1,2)$.
2. Fie funcția $f: A \rightarrow A$ injectivă, unde $A = \{1, 2, \dots, 100\}$.
 - a) Demonstrați că funcția f este surjectivă;
 - b) Determinați funcția f știind că $\frac{f(1)}{100} = \frac{f(2)}{99} = \dots = \frac{f(100)}{1}$.
3. Se consideră numărul complex $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$, iar $S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n, n \in \mathbb{N}$.
 - a) Demonstrați că $z^2 + z + 1 = 0$;
 - b) Determinați S_5, S_6, S_7 .
 - c) Demonstrați că $|S_n| \in \{0,1\}, \forall n \in \mathbb{N}$.
4. Bazinul de apă potabilă dintr-o localitate are forma unui paralelipiped dreptunghic, având drept bază un dreptunghi cu dimensiunile de 30 m, respectiv 20 m. În bazin, apa se află la înălțimea de 10 m, iar gura de evacuare a impurităților de pe suprafața apei se află la înălțimea de 11,215 metri fata de bază. Impuritățile se elimină dacă apa este la minim 3 cm deasupra bazei gurii de evacuare. În bazin este introdus un corp cubic cu latura de 9,1 m care este așezat cu o față pe baza bazinului. Justificați dacă, în această situație, se vor elimina impuritățile de pe suprafața apei. (Se pot utiliza formulele $V_{\text{paralelipiped}} = L \times l \times h; V_{\text{cub}} = a^3$).

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A XI A

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(R)$
 - a) Calculați $A^2(x), A^3(x)$
 - b) Deduceți că $A^{3n}(x) = x^n \cdot I_3, A^{3n+1}(x) = x^n \cdot A(x), A^{3n+2}(x) = x^n \cdot A^2(x), \forall n \in \mathbb{N}$
 - c) Dacă $B = A^{2010}(x) + A^{2011}(x) + A^{2012}(x)$, determinați valorile lui x pentru care matricea B este inversabilă ($\det B \neq 0$).

2. Un tablou matricial de tipul $n \times n$ este organizat numai cu elemente ale mulțimii $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dispuse astfel încât pe fiecare linie și fiecare coloană să apară toate elementele mulțimii A_n și ele să fie dispuse simetric față de diagonala principală a tabloului.
 - a) Pentru $n = 3$ construiți două astfel de tablouri asociate mulțimii A_3
 - b) Demonstrați că cele două matrice anterior construite au același determinant.
 - c) Pentru $n = 2013$ demonstrați că pe diagonala principală a tabloului asociat mulțimii A_{2013} apar toate elementele mulțimii A_{2013}

3.
 - a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+12} - \sqrt{x} - 2}$
 - b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x + 4}{x^3 - 3x + 7} \right)^{503x^2}$
 - c) Dacă $f: R \rightarrow R$, este o funcție astfel încât $|f(x) - e^x| \leq x^{2012} \quad \forall x \in R$, calculați $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

4. Fie funcțiile $f_n: R \setminus \{-1, +1\} \rightarrow R, f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x^n - 1}}, n \in N^*$.
 Dacă $f: R \setminus \{-1, +1\} \rightarrow R, f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + f_1(x) & 1 \\ 1 & 1 & 1 + f_2(x) \end{vmatrix}$ se cere :
 - a) Să se determine $f(x)$
 - b) Să se determine asimptotele la graficul funcției $f(x)$.
 - c) Să se determine $k \in N^*$ pentru care $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k \cdot (f(x))^3$ este număr finit.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

CLASA A XII A

1. Se consideră mulțimea $G = \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = -1\}$

- a) Să se verifice dacă matricile $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 503 & 1 \\ 2011 & -4 \end{pmatrix}$ aparțin mulțimi G.
 b) Să se demonstreze că dacă $A \in G$ atunci $A^3, A^5, \dots, A^{2011} \in G$
 c) Justificați dacă există matrici A și B din mulțimea G astfel încât $A \cdot B \in G$.

2. a) Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4x^2 + 4x$, verificați relația $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$.

Interpretați geometric rezultatul.

b) Determinați numărul real t astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + t \cdot x$ să verifice

relația $\int_0^{1006} f(x)dx = \int_{1006}^{2012} f(x)dx$

c) Să se justifice că putem construi un număr de 2012 funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\int_0^{1006} f(x)dx = \int_{1006}^{2012} f(x)dx$$

3. Fie $M \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime îndeplinind condițiile:

(1) $(1+i) \in M$ și

(2) pentru orice $a, b \in M \Rightarrow a \cdot b \in M$

a) Demonstrați că mulțimea $A = \{1, -1, i, -i\}$ îndeplinește condiția (2)

b) Demonstrați că $(-4) \in M$

c) Justificați dacă este posibil ca mulțimea M să aibă exact 2012 elemente.

4. a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} ax+b, & x \leq 0 \\ \ln(x^2+1) + \arctg x, & x > 0 \end{cases}$ să fie o primitivă a unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

b) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 4x| dx$

c) Să se demonstreze că lungimea graficului funcției $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\sin 4x|$ este mai mare decât 4.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.